

October 2023

Time - Three hours
(Maximum Marks: 100)

PART - A (5 x 1 = 5)

[Note: Answer ALL questions. All questions carry equal marks.]

1. Find the combined equation of the two straight lines represented by $2x + 3y = 0$ and $4x - 5y = 0$.
2. Find the unit vector parallel to $2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$.
3. Find grad ϕ where $\phi = x^2 + y^2 + z^2$.
4. Evaluate: $\int (x^3 - x - 2) dx$.
5. Evaluate: $\int_1^3 \frac{dx}{x}$.

PART - B (10 x 2 = 20)

[Note: Answer any TEN questions. All questions carry equal marks.]

6. Find the equation of the straight lines parallel to the line $3x + 2y - 7 = 0$ and passing through the point $(1, -2)$.
7. Find the centre and radius of the circle $x^2 + y^2 - 8y + 3 = 0$.
8. Show that the equation $x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 31 = 0$ represents an ellipse.
9. If the position vectors of A and B are $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ and $2\vec{i} - \vec{j}$ find \overline{AB} and $|\overline{AB}|$.
10. Find the value of 'm' if the vectors $3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ and $-6\vec{i} + m\vec{j} + 4\vec{k}$ are perpendicular.
11. Find the work done by the force $3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$ when the displacement is $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.
12. If $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ and $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, find $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.
13. If $\phi = xyz$ find $\nabla\phi$.
14. Show that $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (x - 3z)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$ is solenoidal.
15. Evaluate $\int \tan^2 x dx$.
16. Evaluate $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$.

17. Evaluate $\int \frac{1}{x^2+4} dx$.

18. Evaluate $\int \log x dx$.

19. Evaluate $\int x^3 \sin x dx$.

20. Evaluate $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$.

PART - C (5 x 15 = 75)

[Note: Answer ALL questions by choosing either A (OR) B.]

21. (a) (i) Find the value of 'k' so that the equation $3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 5y + k = 0$ represents a pair of straight lines.
(ii) Show that the circles $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ and $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ touch each other. Find the co-ordinates of the point of contact.

(Or)

- (b) (i) Find the axis, vertex, focus, equation of directrix, latus rectum, length of the latus rectum for the parabola $y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$.
(ii) A satellite is travelling around the earth in an elliptical orbit having the earth at a focus and of eccentricity $\frac{1}{2}$. The shortest distance that the satellite gets to the earth is 500 kms. Find the longest distance that the satellite gets from the earth.

22. (a) (i) Show that the points whose position vectors $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ and $4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ form an equilateral triangle.
(ii) Show that the vectors $2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ and $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ are mutually orthogonal.

(Or)

- (b) (i) What is the unit vector perpendicular to each of the vectors $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ and $3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$. Also calculate the sine of the angle between two vectors.
(ii) A particle is displaced from the point $5\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$ to the point $6\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ under the action of forces $10\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$, $4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ and $-2\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$. Calculate the total work done by the forces.

23. (a) (i) If $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{j}$ Find $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ and also verify $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$.
(ii) Find the angle between the surfaces $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x^2 + y^2$ at $(2, -1, 2)$.

(Or)

- (b) (i) If $\vec{F} = (2x + 2y + 2z)\vec{i} - (xy + yz + zx)\vec{j} + 3xyz\vec{k}$. Find $\nabla \times \vec{F}$ and $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$.
(ii) If $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ Evaluate $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$.

24. (a) Evaluate

(i) (a) $\int (2 + x)^2 dx$ (b) $\int \sin^2 x dx$

(ii) (a) $\int \frac{2x+9}{x^2+9x+30} dx$ (b) $\int \sqrt{4-9x^2} dx$

(Or)

(b) Evaluate

(i) (a) $\int (x+6)(x+2) dx$ (b) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx$

(ii) (a) $\int (5x+2)^6 dx$ (b) $\int \frac{dx}{x^2-36}$

25. (a) Evaluate

(i) (a) $\int x \cos x dx$ (b) $\int x e^{5x} dx$

(ii) (a) $\int x^2 e^{nx} dx$ (b) $\int_1^2 x(x-x^2) dx$

(Or)

(b) Evaluate

(i) (a) $\int x^2 \log x dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

(ii) (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)} dx$ (b) $\int_{-1}^1 \log \left(\frac{3-x}{3+x} \right) dx$

தமிழ் வடிவம்

பகுதி - அ (5 x 1 = 5)

[குறிப்பு : அனைத்து வினாக்களுக்கும் விடையளிக்கவும். அனைத்து வினாக்களும் சமமதிப்பெண்கள் பெறும்.]

1. $2x + 3y = 0$ மற்றும் $4x - 5y = 0$ என்ற தனித்தனிச் சமன்பாடுகளைக் கொண்டு நேர்க்கோடுகளின் ஒருங்கிணைந்த சமன்பாட்டினை எழுதுக.
2. $2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் திசையில் உள்ள ஓரலகு வெக்டரைக் காண்க.
3. $\phi = x^2 + y^2 + z^2$ எனில் grad ϕ -ஐக் காண்க.
4. மதிப்பிடுக: $\int (x^3 - x - 2) dx$
5. மதிப்பிடுக: $\int_1^3 \frac{dx}{x}$

[குறிப்பு : ஏதேனும் பத்து வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும். அனைத்து வினாக்களும் சமமதிப்பெண்கள் பெறும்.]

6. $(1, -2)$ என்ற புள்ளிவழிச் செல்லுவதும் $3x + 2y - 7 = 0$ என்ற நேர்க்கோட்டுக்கு இணையான நேர்க்கோட்டின் சமன் பாட்டினைக் காண்க.
7. $x^2 + y^2 - 8y + 3 = 0$ என்ற வட்ட சமன்பாட்டிற்கு மையம் மற்றும் ஆரம் காண்க.
8. $x^2 + 4y^2 - 4x + 24y + 31 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு நீள் வட்டத்தை குறிக்கும் என நிரூபி.
9. A மற்றும் B முறையே $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $2\vec{i} - \vec{j}$ நிலை வெக்டர்கள் என்றால் \overline{AB} மற்றும் $|\overline{AB}|$ -ஐக் கண்டுபிடி.
10. $3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ மற்றும் $-6\vec{i} + m\vec{j} + 4\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் செங்குத்து எனில் 'm' -ன் மதிப்பைக் காண்க.
11. $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ என்பது இடப்பெயர்ச்சியாக இருக்கும் போது $3\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$ என்ற விசையால் செய்யப்பட்ட வேலையைக் காண்க.
12. $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ மற்றும் $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ எனில் $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ -ஐக் காண்க.
13. $\phi = xyz$ எனில் $\nabla\phi$ -ஐக் காண்க.
14. $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (x - 3z)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$ எனில் இது ஒரு வரிச்சுருள் எனக்காட்டு.
15. மதிப்பிடுக: $\int \tan^2 x dx$
16. மதிப்பிடுக: $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$
17. மதிப்பிடுக: $\int \frac{1}{x^2+4} dx$
18. மதிப்பிடுக: $\int \log x dx$
19. மதிப்பிடுக: $\int x^3 \sin x dx$
20. மதிப்பிடுக: $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$

பகுதி - இ (5 x 15 = 75)

[குறிப்பு : ஒவ்வொரு வினாவிலும் அ (அல்லது) ஆ வினாக்களுக்கு விடையளிக்கவும்.]

21. (அ) (i) $3x^2 + 7xy + 2y^2 + 5x + 5y + k = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு இரட்டை நேர்கோட்டை குறிக்கிறது எனில் 'k'-ன் மதிப்பைக் காண்க.
- (ii) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொட்டுக் கொள்கின்றன எனக் காட்டுக. மேலும் வட்டங்கள் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

(அ)

- (ஆ) (i) $y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$ என்ற பரவளையத்தின் அச்சு, உச்சிமுனை, குவிமையம், இயக்குவரை சமன்பாடு, செவ்வகலம், செவ்வகல நீளம் காண்க.
- (ii) ஒரு செயற்கை கோளானது பூமியை நீள்வட்ட சுற்றுப்பாதையில் பூமியை குவிமையமாக கொண்டு மையத் தொலைத்தகவு $\frac{1}{2}$ என சுற்றுகிறது. பூமியிலிருந்து செயற்கை கோளானது 500 கிலோ மீட்டர் குறுந்தொலைவில் இருக்கிறது என்றால் தொலை தூரத்தினைக் காண்க.

22. (அ) (i) $2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் $4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ என்ற வெக்டர்கள் நிலை வெக்டர்களாக கொண்ட மூன்று புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தை உண்டாக்கும் என நிரூபி.
- (ii) $2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ என வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் என நிரூபி.

(அ)

- (ஆ) (i) $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கு செங்குத்தாக உள்ள ஓரலகு வெக்டரைக் காண்க. மேலும் அவ்விரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடையேயான sine கோணத்தைக் காண்க.
- (ii) $10\vec{i} - \vec{j} + 11\vec{k}$, $4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$ மற்றும் $-2\vec{i} + \vec{j} - 9\vec{k}$ என்ற விசைகளின் செயல்பாட்டினால் ஒரு பொருள் $5\vec{i} - 5\vec{j} - 7\vec{k}$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $6\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ என்ற புள்ளிக்கு இடம்பெயர்ந்தால் விசைகள் செய்த மொத்த வேலை எவ்வளவு?

[திரும்புக.....

23. (அ) (i) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{d} = 2\vec{i} + \vec{j}$ எனில்
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$ -யைக் காண்க. மேலும் $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) =$
 $(\vec{a}\vec{b}\vec{d})\vec{c} - (\vec{a}\vec{b}\vec{c})\vec{d}$ என்பதை சரிபார்க்க.

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x^2 + y^2$ சமன்பாட்டில் $(2, -1, 2)$ என்ற புள்ளியின்
 மேற்பரப்பு கோணத்தை கண்டுபிடி.

(அ)

(ஆ) (i) $\vec{F} = (2x + 2y + 2z)\vec{i} - (xy + yz + zx)\vec{j} + 3xyz\vec{k}$ எனில் $\nabla \times \vec{F}$ மேலும்
 $\nabla \times (\nabla \times \vec{F})$ -ஐக் காண்க.

(ii) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{d} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. எனில்
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$ -ஐக் காண்க.

24. (அ) மதிப்பிடுக:

(i) (அ) $\int (2+x)^2 dx$ (ஆ) $\int \sin^2 x dx$

(ii) (அ) $\int \frac{2x+9}{x^2+9x+30} dx$ (ஆ) $\int \sqrt{4-9x^2} dx$

(அ)

(ஆ) மதிப்பிடுக:

(i) (அ) $\int (x+6)(x+2) dx$ (ஆ) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx$

(ii) (அ) $\int (5x+2)^6 dx$ (ஆ) $\int \frac{dx}{x^2-36}$

25. (அ) மதிப்பிடுக:

(i) (அ) $\int x \cos x dx$ (ஆ) $\int x e^{5x} dx$

(ii) (அ) $\int x^2 e^{nx} dx$ (ஆ) $\int_1^2 x(x-x^2) dx$

(அ)

(ஆ) மதிப்பிடுக:

(i) (அ) $\int x^2 \log x dx$ (ஆ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$

(ii) (அ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{(1+\sin x)} dx$ (ஆ) $\int_{-1}^1 \log \left(\frac{3-x}{3+x} \right) dx$